

## ریاضی ۲ - ۶

دکتر مجید اقبالی

۱۲ خرداد ۱۳۹۵

پرسش ۱: انتگرال زیر را بوسیله قضیه گرین حل کنید.

$$\oint_C xydy - y^2 dx$$

که  $C$  مربعی که به کمک خطوط  $x = 1$ ,  $y = 1$  و محورهای مختصات بدست آمده است.

پاسخ: قرار می‌دهیم  $M = xy$ ,  $N = y^2$ . حال داریم:

$$\oint_C xydy - y^2 dx = \iint_R (y + 2y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 3y dx dy = \frac{3}{2}.$$

پرسش ۲: شار میدان  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$  گذرنده از مربعی که گرداگرد آن خطوط  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  است، را بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم  $M = x$ ,  $N = y^2$ .

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial N} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + 2y) dx dy = 4.$$

تعریف: کرل Curl میدان برداری  $\vec{F}$  را بصورت  $\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$  تعریف می‌کنیم.

پرسش ۳: کرل میدان برداری

$$\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2\vec{k}$$

را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} = \\ & \left( \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z) \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y) \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) \right) \vec{k} \\ & = -4 \vec{i} - 2x \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

*m.eghbali@yahoo.com*