معادلات دیفرانسیل۷

دکتر مجید اقبالی

۷ خرداد ۱۳۹۵

۱ تبدیل لاپلاس

پرسش۱ : تبدیل لاپلاس و تبدیل وارون لاپلاس توابع زیر را بیابید:

(آ) $\mathcal{L}[te^{-2t}\sin 3t]$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9} \Longrightarrow \mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t] = (\frac{3}{s^2+9})_{s\to s+2} = \frac{3}{(s+2)^2+9}.$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[te^{-2t}\sin 3t] = -\frac{d}{ds}(\frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{6(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}.$$

(ب) $\mathcal{L}[(t-\pi)\sin 3te^{2t}u_\pi(t)]$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[u_\pi(t)(t-\pi)\sin 3te^{2t}] = e^{-\pi s}\mathcal{L}[(t+\pi-\pi)e^{2(t+\pi)}\sin 3(t+\pi)]$$

$$e^{-\pi s}\mathcal{L}[te^{(2t+2\pi)}(-\sin 3t)] = -e^{-\pi s}e^{2\pi}\mathcal{L}[te^{2t}\sin 3t].$$

ازطرفی داریم:

$$\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9} \Longrightarrow \mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t] = (\frac{3}{s^2+9})_{s\to s-2} = \frac{3}{s^2-4s+13}$$

و نیز

$$\mathcal{L}[te^{2t}\sin 3t] = -\frac{d}{ds}(\frac{3}{s^2-4s+13}) = \frac{6s-12}{(s^2-4s+13)^2}.$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\mathcal{L}[u_\pi(t)(t-\pi)\sin ۳te^{۲t}] = e^{\pi(۲-s)}\frac{۶s-۱۲}{(s^۲-۴s+۱۳)^۲}.$$

(پ) $\mathcal{L}[\sin ۲t\cosh ۳t] =?$

پاسخ:

نخست قرار می دهیم:

$$f(t) = \sin ۲t\cosh ۳t = \sin ۲t\frac{e^{۳t}+e^{-۳t}}{۲} = \frac{۱}{۲}[e^{۳t}\sin ۲t + e^{-۳t}\sin ۲t].$$

با لاپلاس گیری از دو طرف برابری بالا خواهیم داشت

$$F(s) = \frac{۱}{۲}[(\frac{۲}{s^۲+۴})_{s\to s-۳} + \frac{۲}{s^۲+۴})_{s\to s+۳}].$$

سرانجام

$$F(s) = \frac{۱}{۲}[(\frac{۲}{(s-۳)^۲+۴} + \frac{۲}{(s+۳)^۲+۴}].$$

(ت) $\mathcal{L}[\int_۰^t e^{-۲t}\cos ۳tdt] =?$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[\cos ۳t] = \frac{s}{s^۲+۹} \Longrightarrow \mathcal{L}[e^{-۲t}\cos ۳t] = (\frac{s}{s^۲+۹})_{s\to s+۲} = \frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۹}.$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\mathcal{L}[\int_۰^t e^{-۲t}\cos ۳tdt] = \frac{۱}{s}[\frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۹}] = \frac{s+۲}{s(s+۲)^۲+۹s}.$$

(ث) $\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۲s+۵}{s^۲+s+۳}] =?$

پاسخ:

نخست مخرج کسر را با توجه به صورت آن تجزیه می کنیم:

$$F(s) = \frac{۲s+۵}{s^۲+s+۳} = \frac{۲(s+\frac{۱}{۲})+۴}{(s+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۱}{۴}} = \frac{۲(s+\frac{۱}{۲})}{(s+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۱}{۴}} + \frac{۴}{(s+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۱}{۴}}.$$

با توجه به انتقال داریم:

$$f(t) = ۲e^{-\frac{t}{۲}}\cos\sqrt{\frac{۱۱}{۴}}t + \frac{۸\sqrt{۱۱}}{۱۱}e^{-\frac{t}{۲}}\sin\sqrt{\frac{۱۱}{۴}}t.$$

$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{e^{-۳s}}{s(s^۲+۴)}] =?$ (ج)

پاسخ:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲+۴}] = \frac{۱}{۲}\sin ۲t \Longrightarrow \mathcal{L}^{-۱}[\frac{e^{-۳s}}{s^۲+۴}] = u_۳(t)\frac{۱}{۲}\sin ۲(t-۳).$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{s}\frac{e^{-۳s}}{s^۲+۴}] = \frac{۱}{۲}\int_۰^t u_۳(t)\sin ۲(t-۳)dt.$$

$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{e^{-\pi s}}{s^۲+۲s+۵}] =?$ (چ)

پاسخ:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{e^{-۳s}}{s(s^۲+۴)}] = \mathcal{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s+۱)^۲+۴}] = \frac{۱}{۲}e^{-t}\sin ۲t.$$

حال داریم:

$$\mathcal{L}^{-۱}[\frac{e^{-\pi s}}{s^۲+۲s+۵}] = u_\pi(t).f(t-\pi) = \frac{۱}{۲}u_\pi(t)e^{\pi-t}\sin ۲(t-\pi) = \frac{۱}{۲}u_\pi(t)e^{\pi-t}\sin ۲t.$$

(خ) $\mathcal{L}[t^۲\int_۰^t e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}dt] = ?$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[\sinh t] = \frac{۱}{s^۲ - ۱} \Longrightarrow \mathcal{L}[\frac{۱}{t}\sinh t] = \int_s^{+\infty}\frac{۱}{r^۲ - ۱}dr = -\frac{۱}{۲}\ln|\frac{r+۱}{r-۱}||_s^{+\infty} = \frac{۱}{۲}\ln|\frac{s+۱}{s-۱}|.$$

سپس با کمک انتقال خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}] = (\frac{۱}{۲}\ln|\frac{s+۱}{s-۱}|)_{s\to s-۳} = \frac{۱}{۲}\ln|\frac{s-۲}{s-۴}|$$

و

$$\mathcal{L}[\int_۰^t e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}dt] = \frac{۱}{۲s}\ln|\frac{s-۲}{s-۴}|.$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[t^۲\int_۰^t e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}dt] = (-۱)^۲\frac{d^۲}{ds^۲}(\frac{۱}{۲s}\ln|\frac{s-۲}{s-۴}|) = \frac{\ln|\frac{s-۲}{s-۴}|}{s^۳} + \frac{۲(۲s^۲ - ۹s + ۸)}{s^۲(s-۴)^۲(s-۲)^۲}.$$

۱.۱ تابع دلتای دیراک

تابع دلتای دیراک را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\delta_a(t) = \begin{cases} ۰ & \text{if } t \neq a \\ \infty & \text{if } t = a \end{cases}$$

که $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(t)dt = ۱$ می باشد.

قضیه: همواره داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_a(t)dt = f(a)$$

و

$$\mathcal{L}[\delta_a(t)] = \int_۰^{+\infty} e^{-st}\delta_a(t)dt = e^{-sa}.$$

پرسش۲: تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$y'' - ۳y' + ۲y = \delta_۲(t)\cos t, \quad y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۰.$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[y''] - ۳\mathcal{L}[y'] + ۲\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta_۲(t)\cos t].$$

با جاگذاری خواهیم داشت

$$(s^۲\mathcal{L}[y] - sy(۰) - y'(۰)) - ۳(s\mathcal{L}[y] - y(۰)) + ۲\mathcal{L}(y) = \int_۰^{+\infty} e^{-st}\delta_۲(t)\cos t dt$$

که انتگرال پیشین برابر است با

$$e^{-st}\cos t|_{t=۲} = e^{-۲s}\cos ۲.$$

درنتیجه

$$(s^۲ - ۳s + ۲)\mathcal{L}[y] = e^{-۲s}\cos ۲ + s - ۳ \Longrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-۲s}\cos ۲ + s - ۳}{s^۲ - ۳s + ۲}.$$

۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

برای حل این دستگاه ها میتوان با حذف کردن تابعهای مجهول و مشتقات این توابع، معادله ای بدست آورد که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد. با حل این معادله، یکی از توابع مجهول به دست آمده و سپس می توان سایر توابع مجهول را بدست آورد.

پرسش۳: جواب عمومی دستگاه معادلات زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ۵x + ۴y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + ۲y \end{cases}$$

پاسخ:

از معادله $\dfrac{dx}{dt} = ۵x + ۴y$ می توان y را به صورت

$$y = \frac{۱}{۴}\frac{dx}{dt} - \frac{۵}{۴}x \tag{۱}$$

را بدست آورد. سپس با نسبت به t از معادله (۱) دیفرانسیل گیری می کنیم.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{۱}{۴}\frac{d^۲x}{dt^۲} - \frac{۵}{۴}\frac{dx}{dt}.$$

در معادله دوم به جای y و $\frac{dy}{dt}$ مقدارشان را جاگذاری می کنیم.

$$\frac{۱}{۴}\frac{d^۲x}{dt^۲} - \frac{۵}{۴}\frac{dx}{dt} = x + ۲(\frac{۱}{۴}\frac{dx}{dt} - \frac{۵}{۴}x)$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} - ۷\frac{dx}{dt} + ۶x = ۰$$

که یک معادله مرتبه دوم همگن است:

$$t^۲ - ۷t + ۶ = ۰ \Longrightarrow t_۱ = ۶,\ t_۲ = ۱.$$

پس

$$x(t) = c_۱e^t + c_۲e^{۶t}.$$

حال با جایگذاری در معادله (۱) داریم:

$$y(t) = \frac{۱}{۴}(c_۱e^t + ۶c_۲e^{۶t}) - \frac{۵}{۴}(c_۱e^t + c_۲e^{۶t}) = -c_۱e^t + \frac{۱}{۴}c_۲e^{۶t}.$$